Matemáticas básicas

Productos Notables y Factorización

1. $(a + b)(a – b) = a^2 - b^2$
2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
3. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
5. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
6. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 +3a^2b +3a^2c +3ab^2 +3ac^2 +3b^2c +3bc^2 +6abc$
7. $(a + b + c + d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2a(b+c+d)+2b(c+d)+2cd$
8. $(x + y + z + …)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + … + 2(xy + xz + yz + …)$
9. $(a^2 + ab + b^2)(a^2 – ab + b^2) = (a^4 + a^2b^2 + b^4)$
10. $(a + b +c)(a^2 + b^2 + c^2 – ab – ac – bc) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
11. $(a + b + c)(b – c - a)(c – a - b)(a – b - c) = a^4+b^4+c^4-2(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)$
12. $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$
13. $(a + b)(b + c)(a + c) = (a + b + c)(bc + ac + ab) – abc$
14. $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac – bd)^2 + (ad + bc)^2$
15. $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$
16. $(a^2 – b^2)(c^2 – d^2) = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$
17. $(a^2 – b^2)(c^2 – d^2) = (ac - bd)^2 - (ad - bc)^2$
18. $-(b - c)(c - a)(a - b) = a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$
19. $-(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c) = a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$
20. $3(b - c)(c - a)(a - b) = (b – c)^3 + (c – a)^3 + (a - b)^3$
21. $3(a + b)(b + c)(a + c) = (a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)$
22. $(a + b + c)(a - b - c) = a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$

1. $a^2 - b^2 = (a + b)(a – b)$
2. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
3. $a^4 – b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$
4. $a^4 + b^4 = (a^2 + \sqrt{2}\, ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}\, ab + b^2)$
5. $ax + by + bx + ay = (a+b)(x+y)$
6. $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$
7. $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$; x_1,x_2 *son raíces de la ecuación*
8. $(a \mp b)^2 = (a \pm b)^2 \mp 4ab$
9. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 – 2(ab + ac + bc)$
10. $(a + b)^3 - a^3 - b^3 = 3ab(a + b)$
11. $(a - b)^3 - a^3 + b^3 = -3ab(a - b)$
12. $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} b^0 + a^{n-2} b^1 + a^{n-3}b^2 + … + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1})$
13. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} b^0 + a^{n-2} b^1 + a^{n-3}b^2 + … + a^1b^{n-2} + a^0b^{n-1})$

Notar que en la última igualdad, si $b = 1$ y $a \neq 1$ se tiene que

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + … + x^3 + x^2 + x +1)$$

Si n es par

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2} y + x^{n-3} y^2 - x^{n-4} y^3 + … - y^{n-1})$$

Si n es impar

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2} y + x^{n-3} y^2 - x^{n-4} y^3 + … + y^{n-1})$$

proposiciones

a). $x^n + a^n$ (donde a es un número real) no es divisible por $x - a$.

b). La diferencia de dos potencias iguales, $x^n - a^n$, es divisible por $x - a$.

c). La diferencia de dos potencias impares iguales, $x^{2n+1} – a^{2n-1}$, no es divisible por $x + a$.

d). La suma de dos potencias pares iguales, $x^{2n} + a^{2n}$, no es divisible por $x+a$.

Divisibilidad entre $x \pm a$.

Un polinomio entero en x, $P(x) = a_nx^n + … + a_2x^2 + a_1x + a_0$ es divisible si: *i*) a_0 es múltiplo de a, *ii*) si se anula, al sustituir en él, x por el simétrico de a. *Nota*: la condición *i*) es necesaria pero no suficiente, *ii*).

$a)\ \dfrac{x^7 + y^7}{x + y} \to (-y)^7 + y^7 = 0$ $\therefore$ sí lo divide.

$b)\ \dfrac{2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9x + 3}{x - 1} \to$

$i)\ \dfrac{3}{1} = 3\ (es\ exacta)$

$ii)\ 2(1)^4 - 5(1)^3 + 7(1)^2 - 9(1) + 1 = -2$ $\therefore$ no lo divide.

$b)\ \dfrac{x^5 + x^4 - 5x^3 - 7x + 8}{x + 3} \to$

$i)\ \dfrac{8}{3} = 2.66\ (inexacta)$ $\therefore$ no lo divide.

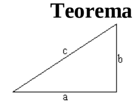
Media aritmética entre *a* y *b*

$(a + b) / 2$

Media geométrica entre *a* y *b*

$(a \cdot b) / 2$

Teorema de Pitágoras



$a^2 + b^2 = c^2$

Ecuación de primer grado: $a x + b = 0$

Solución (una, real) $x = - b / a$

Ecuación de segundo grado: $a x^2 + b x + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

verificando que:

$x_1 \cdot x_2 = c / a$

$x_1 + x_2 = - b / a$

Fórmula general del binomio.

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

$$(x \pm a)^n = x^n \pm \binom{n}{1} x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2}a^2 \pm \cdots \pm \binom{n}{n-2} x^2a^{n-2} + \binom{n}{n-1} x^1a^{n-1} \pm a^n$$

Expansión de una Suma

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots$$

Expansión de Taylor

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$$

Para la extracción de raíces

$$(1 + a)^{1/m} = 1 + \frac{a}{m} + \frac{a^2}{2!\,m}\left(\frac{1}{m} - 1\right) + \frac{a^3}{3!\,m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right) + \cdots$$

$$(1 + a)^{1/m} = 1 + \frac{a}{m} - \frac{a^2(m-1)}{2!\,m^2} + \frac{a^3(m-1)(2m-1)}{3!\,m^3} - \cdots$$

Progresiones

Aritméticas

$a_n = a_{n-1} + d$

Término enésimo

$a_n = a_1 + (n-1)d$ $\qquad a_n = a_k + (n-k)d$

Interpolación de términos

$$d = \frac{b - a}{m + 1}$$

Sean los **e x t r e m o s** ***a*** **y** ***b***, y el número de **m e d i o s** a interpolar ***m***.

Suma de los *n* primeros términos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Suma de dos términos equidistantes

$a_i + a_j = a_1 + a_n$

Geométricas

$a_n = a_{n-1} \cdot r$

$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$

Interpolación de términos

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Suma de los n primeros términos

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{(r - 1)} \qquad S_n = \frac{(a_n r - a_1)}{(r - 1)}$$

Suma de los ∞ términos

$S_\infty = \dfrac{a_1}{(1 - r)}$ para $| r | < 1$

Producto de dos términos equidistantes

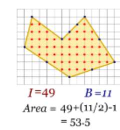
$a_i \cdot a_j = a_1 \cdot a_n$

Producto de *n* términos equidistantes

$$P = \pm\sqrt{(a_1 . a_n)^n}$$

Teorema de Pick

Sea un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras. Si B es el número de puntos enteros en el borde, I el número de puntos enteros en el interior del polígono, entonces el área A del polígono se puede calcular con la fórmula: $S = I + \frac{B}{2} - 1$



Funciones pares e impares

Función par

$f(-x) = f(x)$

Función impar

$f(-x) = - f(x)$

Exponentes y radicales

$a^m a^m = a^{m+n}$ $\qquad (a^m)^n = a^{mn}$ $\qquad (ab)^n = a^n b^n$

$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad a^{-1} = \frac{1}{a^n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ $\qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ $\qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

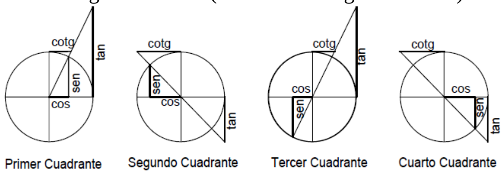
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Logaritmos

$log_a\, uv = log_a\, u + log_a\, v$	$ln\, x^2 \neq (ln\, x)^2$
$log_a\, u/v = log_a\, u - log_a\, v$	$ln\,(x + 4) \neq ln\, x + ln\, 4$
$log_a\, u^n = n\, log_a\, u$	$ln\,(x) / ln\,(x^2) \neq ln\,(x) - ln\,(x^2)$
$log^n{}_a\, u = (log_a\, u)^n$	
$log\, 10^0 = log\, 1 = 0$	$log_a[bc/d]^n = n(log_a b + log_a c - log_a d)$
$log\, 10 = 1$	
$e^0 = 1\ .\because\ ln\, 1 = 0$	$log\, x = log_{10}\, x$
$e^1 = e\ .\because\ ln\, e = 1$	$ln\, x = log_e\, x$
$e^{-r} = 1/e^r$	$a^r a^s = e^{r\, ln\, a} e^{s\, ln\, a} = e^{r\, ln\, a\, +\, s\, ln\, a}$
$e^r e^s = e^{r+s}$	$a^r a^s = e^{(r+s)\, ln\, a} = a^{r+s}$
$e^r / e^s = e^{r-s}$	$ln\, a^r = r\, ln\, a$
$(e^r)^t = e^{rt}$	$a^x e^x = e^{x\, ln\, a} e^x = e^{x\, +\, x\, ln\, a}$
$e^{lnx} = x, x>0$	$x^a = e^{a\, ln\, x}$
$a^t = e^{\,t\, ln\, a}$	$2^\pi = e^{\pi\, ln\, 2}$
$log_a\, 1 = 0\ .\because\ log_a\, a = 1$	$y = e^x \Leftrightarrow x = ln\, y$
$log\,(a\text{-}b) = log(a/e^b)$	$y = e^x$ es la inversa de $y = ln\, x$
$log_b\, a = log_c\, a / log_c\, b$	$a^{log_a b} = b$

Trigonométricas

Líneas Trigonométricas (circunferencia goniométrica)

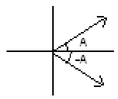


Funciones de ángulos particulares

	0°	90°	180°	270°	30°	45°	60°
sen	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	1	0	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	0	∞	0	-∞	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	∞	0	-∞	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
sec	1	∞	-1	∞	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
csc	∞	1	∞	-1	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Funciones de ángulos simétricos

a) si el ángulo "α" es agudo



sin (-A) = - sin A | *cot (-A) = - cot A*
cos (-A) = cos A | *sec (-A) = sec A*
tan (-A) = - tan A | *csc (-A) = - csc A*

b) Si el ángulo "α" es negativo no es agudo.

Si el ángulo "α" es negativo, y la medida en valor absoluto es mayor que 90º; se suma con 360º para convertirlo en positivo y luego se aplica alguna de las fórmulas anteriores, según el cuadrante donde se ubique el residuo de la división.

Funciones de ángulos complementarios (cofunciones) (1er cuadrante)

sin (90°- A) = cos A | *cot (90°- A) = tan A*
cos (90°- A) = sin A | *sec (90°- A) = csc A*
tan (90°- A) = cot A | *csc (90°- A) = sec A*

Funciones de ángulos suplementarios (2do cuadrante)

sin (108°- A) = sin A | *cot (180°- A) = - cot A*
cos (180°- A) = - cos A | *sec (180°- A) = - sec A*
tan (180°- A) = - tan A | *csc (180°- A) = csc A*

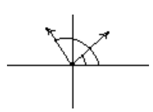
Funciones de ángulos 3er cuadrante

sin (A - 180°) = - sin A | *cot (A- 180°) = cot A*
cos (A- 180°) = - cos A | *sec (A- 180°) = - sec A*
tan (A- 180°) = tan A | *csc (A- 180°) = - csc A*

Funciones de ángulos 4to cuadrante

sin (360°- A) = - sin A | *cot (360°- A) = - cot A*
cos (360°- A) = cos A | *sec (360°- A) = sec A*
tan (360°- A) = - tan A | *csc (360°- A) = - csc A*

Funciones que difieren entre sí en 90°



sin (90°+ A) = cos A | *cot (90°+ A) = - tan A*
cos (90°+ A) = - sin A | *sec (90°+ A) = - csc A*
tan (90°+ A) = - cot A | *csc (90°+ A) = sec A*

Funciones que difieren entre sí 180°

sin (180°+ A) = - sin A | *cot (180°+ A) = cot A*
cos (180°+ A) = - cos A | *sec (180°+ A) = - sec A*
tan (180°+ A) = tan A | *csc (180°+ A) = - csc A*

Funciones que difieren entre sí 270°

sin (270°+A) = - cos A | cot (270°+A) = - tanA
cos (270°+A) = sin A | sec (270°+A) = csc A
tan (270°+A) = - cot A | csc (270°+A) = - sec A

Funciones trigonométricas para ángulos mayores que 360º

Se divide la medida del ángulo "α" dado entre 360º y se toma como medida equivalente el residuo de la división y luego según el cuadrante donde se ubique dicho residuo, se aplica la fórmula correspondiente.

Identidades

Recíprocas

$\sin\theta\csc\theta = 1$
$\cos\theta\sec\theta = 1$
$\tan\theta\cot\theta = 1$

De División

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

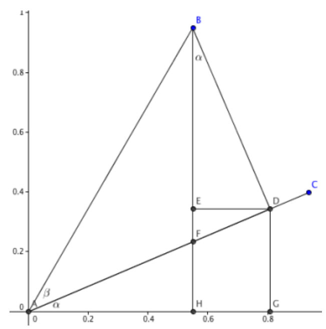
$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Pitagóricas

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

Suma y Resta de 2 Ángulos

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{BH}{AB} = \frac{HE+EB}{AB} = \frac{HE}{AB} + \frac{EB}{AB} = \frac{DG}{AB} + \frac{EB}{AB}$$



Como DG y AB pertenecen a triángulos diferentes multiplicamos por un lado en común.

$$\frac{DG}{AB} = \frac{DG}{AB}\frac{AD}{AD} = \frac{DG}{AD}\frac{AD}{AB} = \sin\alpha\cos\beta$$

y $\dfrac{EB}{AB} = \dfrac{EB}{AB}\dfrac{BD}{BD} = \dfrac{EB}{BD}\dfrac{BD}{AD} = \cos\alpha\sin\beta$

Para la tangente, dividir los miembros de la razón entre $\cos\alpha\cos\beta$

FÓRMULAS

$$\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha\ cos\beta \pm cos\alpha\ sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha\ cos\beta \mp sin\alpha\ sin\beta$$
$$tan(\alpha \pm \beta) = \frac{tan\ \alpha \pm tan\beta}{1 \mp tan\alpha\ \ tan\beta}$$
$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{cot\alpha\ \ cot\beta \mp 1}{cot\alpha \pm cot\beta}$$

* Para más de 2 ángulos, tomar conjuntos como un solo término y desarrollar.

Razones de suma y resta de senos y cosenos

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\tan\frac{(\alpha+\beta)}{2}}{\tan\frac{(\alpha-\beta)}{2}} \qquad \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\frac{\alpha+\beta}{2}\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Funciones de múltiplos de A

$$\sin 2\alpha = 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha$$
$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$
$$tan\ 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
$$\cot 2\alpha = \frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{2}$$
$$\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\ cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\ sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$
$$\sin 3\alpha = 3\ sin\ \alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

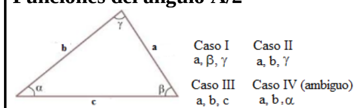
* Se puede generalizar por ejemplo sin 3A = sin (2A+A) y desarrollar para obtener sin 3A = 3 sin A – 4 $\sin^3$ A

Funciones del ángulo A y A/2

$$sin\ \alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$$
$$tan\ \alpha = \frac{2\ tan\ (\alpha/2)}{1 - tan^2(\alpha/2)}$$
$$tan^2(\alpha/2) = \frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$$
$$cos\ \alpha = cos^2(\alpha/2) - sin^2(\alpha/2)$$
$$2\ cos^2(\alpha/2) = 1 + cos\ \alpha$$
$$2\ sin^2(\alpha/2) = 1 - cos\ \alpha$$
$$tan(\alpha/2) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+tan^2\alpha}}{tan\ \alpha}$$

* Si A es agudo, utilizar (+) y si es obtuso el (-)

Funciones del ángulo A/2



donde s = semiperimetro y $R = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{s-a}$$
$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \qquad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{R}{s-b}$$
$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \qquad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{R}{s-c}$$
$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{(a-b)\tan\frac{(\alpha+\beta)}{2}}{a+b}$$

Funciones trigonométricas en función de la tangente del ángulo mitad (usadas para integrar)

$$\sin\alpha = \frac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)} \qquad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)} \qquad \tan\alpha = \frac{2\tan(\alpha/2)}{1-\tan^2(\alpha/2)}$$
$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \tan 2\alpha = \frac{2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Funciones trigonométricas en función del coseno del ángulo doble (usadas para integrar)

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \qquad \tan\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Sumas y restas en productos

sin A + sin B = 2 sin ½ (A+B) cos ½ (A-B)
sin A – sin B = 2 sin ½ (A-B) cos ½ (A+B)
cos A + cos B = 2 cos ½ (A+B) cos ½ (A-B)
cos A - cos B = - 2 sin ½ (A+B) sin ½ (A-B)
cos B – cos A = 2 sin ½ (A+B) sin ½ (A-B)

Sumas y restas en cocientes

tan A + tan B = sin (A+B) / cos A cos B
tan A - tan B = sin (A-B) / cos A cos B
cot A + cot B = sin (A+B) / sin A sin B
cot A - cot B = sin (B-A) / sin A sin B

Productos en sumas y restas

cos A sin B = ½[sin(A+ B)- sin(A - B)]
sin A cos B = ½[sin(A - B)+sin(A+B)]
sin A sin B = ½[cos(A - B)- cos(A+B)]
cos A cos B = ½[cos(A - B)+cos(A+B)]

Funciones Trigonométricas Inversas

$$\sin^{-1}\alpha = \cos^{-1}\sqrt{1-\alpha^2} \qquad \sin^{-1}\alpha = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\alpha$$

$$\cos^{-1}\alpha = \sin^{-1}\sqrt{1-\alpha^2} \qquad \cos^{-1}\alpha = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\alpha$$

$$\tan^{-1}\alpha = \sin^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \qquad \tan^{-1}\alpha = \frac{\pi}{2} - \cot^{-1}\alpha$$

Sumas y restas de Funciones Trigonométricas Inversas

$$\sin^{-1}\alpha \pm \sin^{-1}\beta = \sin^{-1}\left(\alpha\sqrt{1-\beta^2} \pm \beta\sqrt{1-\alpha^2}\right)$$

$$\cos^{-1}\alpha \pm \cos^{-1}\beta = \cos^{-1}\left(\alpha\beta \mp \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}\right)$$

$$\tan^{-1}\alpha \pm \tan^{-1}\beta = \frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta}$$

Teorema de los Senos

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Teorema de los Cosenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Teorema de las Tangentes

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\frac{a-c}{a+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-C)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}$$

Caso ambiguo: Conocidos dos lados *a* y *b*, y el ángulo opuesto a uno de ellos.
I A es obtuso.- Hay una solución y solo es posible para *a*>*b*; si A es obtuso, B debe ser agudo.
II A es agudo.- B puede ser agudo, recto u obtuso.

I A>90° { *a* > *b*; hay una solución
a = *b*; no hay solución
a < *b*; no hay solución

II A<90° { *a*>*b*; hay una solución
a=*b*; hay una solución
a<*b* { *a* > *b sin* A; hay dos soluciones (B y B' son suplementarios)
a = *b sin* A; hay una sola solución
a < *b sin* A; no hay solución

Seno, Coseno y Tangente de los semiángulos, donde *s* es el semiperímetro. **(Fórmula de Briggs)**

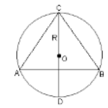
$$\sin(\alpha/2) = \frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{bc} \qquad \sin(\beta/2) = \frac{\sqrt{(s-a)(s-c)}}{ac} \qquad \sin(\gamma/2) = \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)}}{ab}$$

$$\cos(\alpha/2) = \frac{\sqrt{s(s-a)}}{bc} \qquad \cos(\beta/2) = \frac{\sqrt{s(s-b)}}{ac} \qquad \cos(\gamma/2) = \frac{\sqrt{s(s-c)}}{ab}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha/2) = \frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{s(s-a)} \qquad \mathrm{tg}(\beta/2) = \frac{\sqrt{(s-a)(s-c)}}{s(s-b)} \qquad \mathrm{tg}(\gamma/2) = \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)}}{s(s-c)}$$

Triángulo y la circunferencia circunscrita

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\,\gamma}$$



Radio de la circunferencia circunscrita

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Superficie del triángulo inscrito

$$S = \frac{abc}{4R} \qquad S = \frac{s}{2R}$$

donde s = semiperímetro

Radio de la circunferencia inscrita

$$r = \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

Superficie del triángulo circunscrito

$$S = \frac{r(a+b+c)}{2} = rs$$

donde s = semiperímetro

Superficie del triángulo rectángulo

$$S = \frac{c^2}{4}\sin 2\alpha = \frac{c^2}{4}\sin 2\beta = \frac{a^2}{2}\tan\beta = \frac{b^2}{2}\tan\alpha = \frac{a^2}{2}\cot\alpha = \frac{b^2}{2}\cot\beta$$

$$S = \frac{ab}{2}, aplicando\ el\ teorema\ de\ Pitágoras\ S = \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{2} = \frac{b\sqrt{c^2-b^2}}{2}$$

Superficie del triángulo oblicuángulo

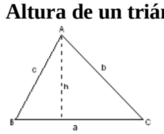
$$S = ½\,ab\,sin\,C = ½\,ac\,sin\,B = ½\,bc\,sin\,A$$

$$S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\,\sin A} = \frac{b^2\sin A\sin C}{2\,\sin B} = \frac{c^2\sin A\sin B}{2\,\sin C}$$

Formula de Herón

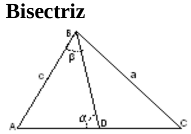
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ donde s = semiperímetro

Altura de un triángulo



$$h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a} = \frac{2S}{a}$$

Bisectriz

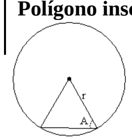


$$AD = \frac{bc}{a+c} \qquad BD = \frac{C\,sin\,A}{sin\,\alpha}$$

Propiedad de la bisectriz

$$\frac{AD}{DC} = \frac{c}{a}$$

Polígono inscrito en la circunferencia

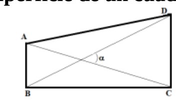


S =N r² cos A *sin* B   donde N es núm. de lados

S =N r² ½ *sin* 2A

$$A = 90° - \frac{360°}{2N}$$

Superficie de un cuadrilátero



$$S = \frac{\overline{AC}\ \overline{BD}}{2}\sin\alpha$$

Relaciones entre funciones trigonométricas y exponenciales

Forma de Euler $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$

$$sin\,\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \qquad cos\,\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$tan\,\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta}+e^{-i\theta})} \qquad cot\,\theta = i\,\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}$$

$$sec\,\theta = \frac{2}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}} \qquad csc\,\theta = \frac{2i}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

Coordenadas del punto medio.

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Área de un polígono.

$$A = 1/2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \dots & \dots \\ x_n & y_n \end{vmatrix} \qquad A = ½\,(x_1y_2+x_2y_3+\ldots - x_1y_3 - x_2y_1\ldots)$$

La Línea Recta

Pendiente

$m = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = tan\theta$ para $x_1 \neq x_2$

$L_1 \perp L_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$

Forma punto-pendiente.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Forma pendiente-ordenada

$y = mx + b$

Forma dos puntos

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x - x_1)$$

Forma dos puntos con determinantes

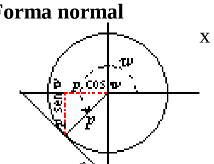
$$L = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x & y \end{vmatrix} = xy_1 + x_1y_2 + x_2y - xy_2 - x_2y_1 - x_1y = 0$$
$$= x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

Forma general

$Ax + By + C = 0$

Forma normal

x cos w + y sin $w - p = 0$



donde p es la longitud de la recta normal trazada del origen a la recta ℓ, con la que es perpendicular.

Reducción de la forma general $Ax + By + C = 0$ a la forma normal $x \cos w + y \sin w - p = 0$.

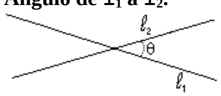
$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

El signo del radical se selecciona de acuerdo a:

1. si $C \neq 0$, el radical es de signo contrario a C.
2. si $C = 0$ y $B \neq 0$, el radical y B tienen el mismo signo.
3. si $C = B = 0$ y $A \neq 0$, el radical y A tienen el mismo signo.

Exe. $3x\text{-}4y\text{-}24=0 \Rightarrow \dfrac{3x\text{-}4y\text{-}24}{5} = 0$ $\quad p = 24/5$, $\quad w = 306^{\circ}\ 52'\ 12''$

Ángulo de l_1 a l_2.



$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

para $m_1 m_2 \neq -1$

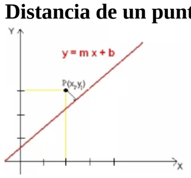
Criterios para determinar m_1 y m_2

Si ambas son del mismo signo, m_2 es la mayor en valor absoluto.
Si son de signo contrario, m_2 es la negativa.

Distancia de $P(x_1,y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Distancia de un punto $P(x_1,y_1)$ a la recta $y = mx+b$



$$d = \frac{|mx_1 - y_1 + b|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$d = \frac{|y_1 - mx_1 - b|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

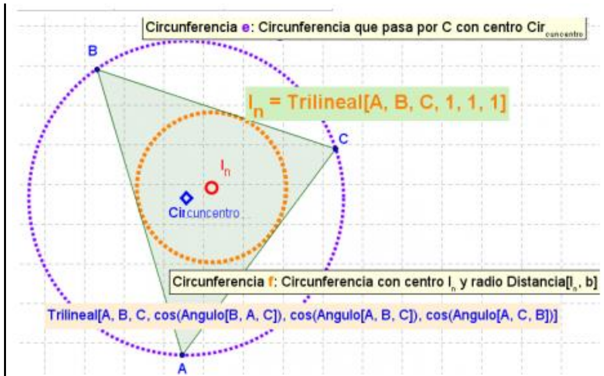
Distancia del origen a la recta $y = mx+b$.

$$d = \frac{-b}{\pm\sqrt{m^2 + 1}}$$

Pendiente de la recta $y = mx + b$ que pasa por la intersección de las rectas $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$.

$$\begin{vmatrix} m & b \\ m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \\ m & b \end{vmatrix} = 0$$

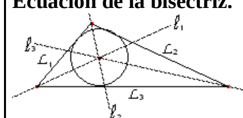
Punto Trilineal.



Las distancias del punto trilineal a los lados a, b y c del triángulo ABC serán $(|ku|, |kv|, |kw|)$ siendo $k = \frac{2\,\acute{A}rea\ (ABC)}{au+bv+cw}$.

Punto	u	v	w
A	1	0	0
B	0	1	0
C	0	0	1
Cincuncentro	cos A	cos B	cos C
Incentro	1	1	1
Baricentro	1/a	1/b	1/c
Ortocentro	cos B cos C	cos A cos C	cos A cos B

Ecuación de la bisectriz.



L_1= Ax + By + C = 0
L_2= A′x + B′y + C′ = 0
L_3= A″x + B″y + C″ = 0

$$l_1.\quad \frac{A''x + B''y + C''}{\pm\sqrt{(A'')^2 + (B'')^2}} = -\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$l_2.\quad \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{(A')^2 + (B')^2}}$$

$$l_3.\quad \frac{A''x + B''y + C''}{\pm\sqrt{(A'')^2 + (B'')^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{(A')^2 + (B')^2}}$$

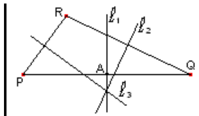
Intersección de las bisectrices (Incentro)

Si los vértices tienen coordenadas (x_a,y_a), (x_b,y_b), y (x_c,y_c), y sus respectivos lados opuestos tienen longitudes a, b, c, el incentro tiene coordenadas:

$$\left(\frac{ax_a + bx_b + cx_c}{a+b+c}, \frac{ay_a + by_b + cy_c}{a+b+c}\right) = \frac{a}{a+b+c}(x_a, y_a) + \frac{b}{a+b+c}(x_b, y_b) + \frac{c}{a+b+c}(x_c, y_c)$$

Las coordenadas trilineales (u,v,w) del incentro son 1 : 1 : 1.
Las coordenadas baricéntricas del incentro son $a : b : c$.

Ecuación de la mediatriz.



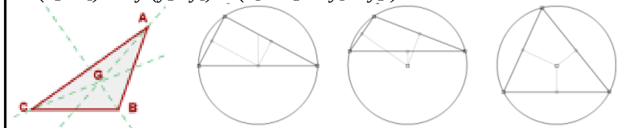
A (x_A, y_A)

$$L_1 \rightarrow y - y_A = \frac{-(x - x_A)}{m_{PQ}}$$

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

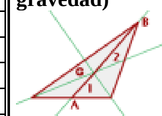
Intersección de las mediatrices (Circuncentro)

Situado en el plano, obtener dos ecuaciones y resolver el sistema
$2x\,(x_2 - x_1) + 2y\,(y_2 - y_1) + (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2) = 0$



En un triángulo rectángulo, el circuncentro coincide con el punto medio de la hipotenusa.

Intersección de las medianas. (Baricentro, Centroide o centro de gravedad)



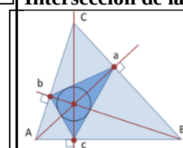
$BG = 2\ GA$

Coordenadas del baricentro

$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3)$

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

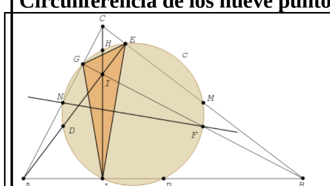
Intersección de las alturas (Ortocentro)



El ortocentro es el icentro del triángulo órtico abc

Situado en el plano, obtener dos ecuaciones y resolver el sistema
(comprobar el último signo)
$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y - (x_2 - x_1)x_3 - (y_2 - y_1)y_3 = 0$

Circunferencia de los nueve puntos.



Circunferencia que se puede construir sobre cualquier triángulo dado. Su nombre deriva del hecho que la circunferencia pasa por nueve puntos notables, seis de ellos sobre el mismo triángulo (salvo que el triángulo sea obtusángulo). Estos son:
El punto medio de cada lado del triángulo, los pies de las alturas, los puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y los vértices del triángulo.

Consideremos las alturas del triángulo ABC: AE, BG y CJ. El triángulo GEJ es el triángulo órtico del triángulo ABC, y el punto I es el ortocentro del triángulo ABC. Las alturas de este, son las bisectrices de los ángulos internos de aquel. Los lados del triángulo ABC son las bisectrices exteriores del triángulo GEJ. Las bisectrices del ángulo JGE cortan a la mediatriz del lado opuesto, EJ en los puntos F y N que se hallan sobre la circunferencia circunscrita c. Observemos que los triángulos ACJ y ACE son rectángulos teniendo ambos al lado AC como hipotenusa. Se sigue que los cuatro puntos A, C, E y J son concíclicos y el centro de la circunferencia que los contiene se halla sobre la intersección de la hipotenusa AC con la mediatriz del segmento EJ, esto es, el punto N. Se sigue que N es punto medio del segmento AC.
De modo semejante, los triángulos EIB y JIB son rectángulos compartiendo la hipotenusa IB. Por lo tanto, los puntos E, I, J y B son concíclicos y el centro de la circunferencia que los contiene se halla sobre la intersección de la hipotenusa IB con la mediatriz del segmento EJ, esto es el punto F. De igual modo, se demuestra que los puntos M y P son los puntos medios de los lados AB y BC respectivamente.
De forma análoga, se demuestra que los puntos D y H son puntos medios de los segmentos AI y CI respectivamente.

Punto de intersección de dos rectas.

$a_1 x + b_1 y = c_1$
$a_2 x + b_2 y = c_2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

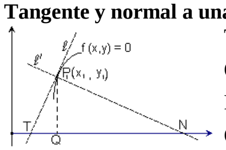
$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Punto de intersección de 3 rectas

$y = m_1x + b_1$
$y = m_2x + b_2$
$y = m_3x + b_3$

$$\begin{vmatrix} m_1 & b_1 \\ m_2 & b_2 \\ m_3 & b_3 \\ m_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

Tangente y normal a una curva.



TP_1= longitud de la tangente
QT= longitud de la subtangente
P_1N= longitud de la normal
QN= longitud de la subnormal
m_1= pendiente de la tangente

$$TQ = \frac{y_1}{m_1} \qquad TP_1 = \frac{y_1}{m_1}\sqrt{1+m_1^2}$$
$$QN = m_1 y_1 \qquad P_1N = y_1\sqrt{1+m_1^2}$$

La Circunferencia

Ecuación ordinaria de la circunferencia
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Ecuación de la tangente a la circunferencia con centro (0,0) en el punto (x_1,y_1)
$xx_1 + yy_1 = r^2$

Ecuación general
$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
$D = -2h,\ E = -2k,\ F = h^2 + k^2 - r^2$

Radio

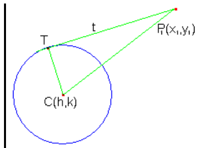
$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - F}$$
$$r^2 = (-h)^2 + (-k)^2 - F$$

Coordenadas del centro
$h = - D/2 \qquad k = - E/2$

Tangente T en el punto P_1 (x_1,y_1)

$$y = \frac{r^2 - (x-h)(x_1-h)}{y_1 - k} + k$$

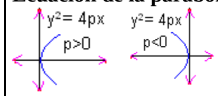
Longitud de la tangente de un punto a una circunferencia.



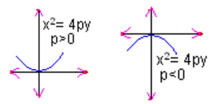
$$t^2 = (x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2$$
$$t^2 = x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F$$

La Parábola

Ecuación de la parábola con vértice en el origen.



directriz $x = - p$
LR = $|4p|$
V(0,0)
F(p,0)



directriz $y = - p$
LR = $|4p|$
V(0,0)
F(0,p)

Ecuación de la parábola con vértice en (h , k)

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
V(h,k)
F($h+p,k$)
directriz $x = h-p$

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$
V(h,k)
F(h, k+p)
directriz $y = k-p$

Ecuación general de la parábola.
$x^2-2hx-4py+h^2+4pk = 0$
$Ax^2+Dx+Ey+F = 0$
A = coeficiente de x^2
$D = - 2h,\quad E = - 4p,\ F = h^2 + 4pk$

$Cy^2 + Dx + Ey +F = 0$
C = coeficiente de y^2
$D = - 4p,\quad E = - 2k,\quad F = k^2 + 4ph$

Para la parábola $y = ax^2+bx+c$
si $a>0$, abre hacia arriba y tiene un mínimo de (c- $b^2/4a$) cuando x=-$b/2a$
si $a<0$, abre hacia abajo y tiene un máximo de (c-$b^2/4a$) cuando x=-$b/2a$

Máximo y mínimo del trinomio y = $ax^2 + bx + c$

I Si a>0, tiene un mín.
II Si a<0, tiene un máx. en $x = -\dfrac{b}{2a}$ y su valor es $y_i = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

Ecuación de la recta tangente a la parábola y^2=4px en $P_1(x_1,y_1)$ de la curva es $y_1y = 2p(x+x_1)$.
Ecuación de la recta tangente a la parábola x^2=4py en $P_1(x_1,y_1)$ de la curva es $x_1x = 2p(y+y_1)$.
Ecuación de la recta tangente a $y^2 = 4px$ que tiene pendiente m, es
$y = mx + p/m$, si $m\neq0$.
Ecuación de la recta tangente a $x^2 = 4py$ que tiene pendiente m, es
$y = mx - m^2p$, si $m\neq0$.
Ecuación de la tangente a la parábola que pasa por $P_1(x_1,y_1)$.

$y - y_1 = m(x-x_1)$ (1)
$y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (2)
$ax^2 + bx + c = 0$ (3)

Sustituir y de (1) en (2). Reducir a la forma (3). Aplicar b^2-$4ac$=0 a (3). Reducir y encontrar el valor de m. Sustituir $m_{1,2}$ en (1).

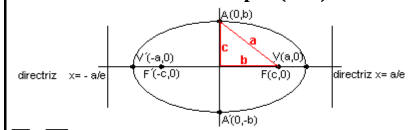
Tangente T en P_1 (x_1,y_1) con vértice (x_0,y_0)

$$y = \frac{2(y_1-y_0)(x-x_1)}{x_1-x_0} + y_1$$

Determinación de la altura del foco dados la abertura D y la profundidad a de la parábola.
$h = D^2 / (16\ a)$

La Elipse

Ecuación normal de la elipse (a>b)



$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$
$a^2 = b^2 + c^2$
$LR = 2b^2/a$
Excentricidad
$e = c/a \quad c \le a \qquad 0 \le e \le 1$
Directriz
$x = \pm a/e = \pm a^2/c$

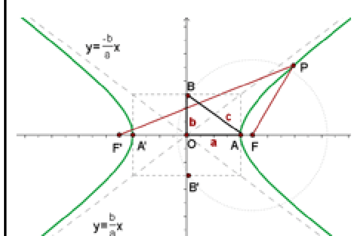
Ecuación reducida (eje horizontal)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

De eje vertical
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

De eje horizontal y centro (h,k)
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Intersección de los ejes en el origen
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

La Hipérbola



$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$
$c^2 = a^2 + b^2$
$LR = 2b^2/a$

Excentricidad
$e = c/a \qquad c \ge a \qquad e \ge 1$

Ecuación reducida (eje horizontal)
F´(0,- c) y F(0,c)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Asíntotas

$y= \pm\frac{b}{a}x$

Ecuación reducida (eje vertical)

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Asíntotas

$y= \pm\frac{a}{b}x$

Horizontal con centro en (h,k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$
donde A y B tienen signos opuestos

Hipérbola Equilátera
$x^2-y^2=a^2$
Asíntotas
$y = \pm x$
Excentricidad
$e= \sqrt{2}$

Sumatorias

Teoremas

$$\sum_{i=m}^{n} c=(n-m+1)c \qquad \sum_{i=m}^{n} ca_i=c\sum_{i=m}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=m}^{n}(a_i \pm b_i)=\sum_{i=m}^{n} a_i \pm \sum_{i=m}^{n} b_i$$

Expansiones y Fórmulas de sumatorias
Expansión de Taylor $e^x=1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \dots$
Expansión de Suma $(1+x)^n=1 + nx/1! + n(n-1)x^2/2! + \dots -\infty<x<\infty$

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2k= n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} 4k= 2n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-1)= n(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)= n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}\,n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=p}^{q} k=\frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$$

DERIVADAS

Sean U, V y W, funciones derivables de x y C una constante

$$\frac{d}{dx}\,C=0$$

$$\frac{d}{dx}\,(U\pm V\pm W)=\frac{d}{dx}\,U \pm\frac{d}{dx}\,V \pm\frac{d}{dx}\,W$$

$$\frac{d}{dx}\,(CU)=C\frac{d}{dx}\,U$$

$$\frac{d}{dx}\,(UV)= V\frac{d}{dx}\,U+ U\frac{d}{dx}\,V$$

$$\frac{d}{dx}\,(UVW)= VW\frac{d}{dx}\,U+UW\frac{d}{dx}\,V+UV\frac{d}{dx}\,W$$

$$\frac{d}{dx}\,U^n=nU^{n-1}\frac{d}{dx}\,U$$

$$\frac{d}{dx}\frac{U}{V}=\frac{\left(V\frac{d}{dx}U-U\frac{d}{dx}V\right)}{V^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{U}=\frac{1}{2\sqrt{U}}\frac{d}{dx}U = \frac{\frac{d}{dx}U}{2\sqrt{U}}$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt[n]{U^m}=\frac{m}{n}\sqrt[n]{U^{m-n}}\frac{d}{dx}U=\frac{m}{n}(U^{m-n})^{\frac{1}{n}}\frac{d}{dx}U$$

Funciones Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\sin U=\cos U\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\cos U=-\sin U\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\tan U= \sec^2 U\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\cot U=-\csc^2 U\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\sec U=\sec U\tan U\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\csc U= -\csc U\cot U\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}U=\frac{1}{\sqrt{1-U^2}}\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}U=-\frac{1}{\sqrt{1-U^2}}\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}U=\frac{1}{1+U^2}\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}U=-\frac{1}{1+U^2}\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}U=\frac{1}{U\sqrt{U^2-1}}\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}U=-\frac{1}{U\sqrt{U^2-1}}\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\sin^n U=n\sin^{n-1}U\cos U\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\cos^n U=-n\cos^{n-1}U\sin U\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\tan^n U=n\tan^{n-1}U\sec^2 U\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\cot^n U=-n\cot^{n-1}U\csc^2 U\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\sec^n U= n\sec^n U\tan U\,\frac{d}{dx}U$$

$$\frac{d}{dx}\csc^n U= -n\csc^n U\cot U\,\frac{d}{dx}U$$

Funciones Logarítmicas y Exponenciales

$$\frac{d}{dx}\ln|U|=\frac{1}{U}\,\frac{d}{dx}\,U$$

$$\frac{d}{dx} log_e U = \frac{1}{U \, ln \, a} \frac{d}{dx} U$$

$$\frac{d}{dx} \, log_a U = \frac{1}{U} log_a e \frac{d}{dx} U$$

$$\frac{d}{dx} \, log_a |U| = \frac{1}{U \ln a} \frac{d}{dx} U$$

$$\frac{d}{dx} \, a^U = a^U \ln a \, \frac{d}{dx} U$$

$$\frac{d}{dx} \, a^{nx} = n \, a^{nx} \ln a$$

$$\frac{d}{dx} \, e^U = e^U \frac{d}{dx} U$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{e^x} = \frac{1}{2} \sqrt{e^x}$$

$$\frac{d}{dx} x e^x = e^x (1 + x)$$

$$\frac{d}{dx} U^V = V \, U^{V-1} \frac{d}{dx} U + \ln U \, (U^V \frac{d}{dx} V)$$

$$\frac{d}{dx} \ln x^n = \frac{n}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln \sqrt{U} = \frac{1}{2U} \frac{d}{dx} U$$

$$\frac{d}{dx} \ln(1 \pm x) = \frac{\pm 1}{1 \pm x}$$

Ecuación general de la circunferencia	$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$
Centro de la circunferencia (h , k)	$h = -\frac{D}{2A}$ $\quad k = -\frac{E}{2A}$
Radio de la circunferencia	$r = \frac{1}{2A} \sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}$
Condición para que sea una circunferencia	$D^2 + E^2 - 4AF > 0$